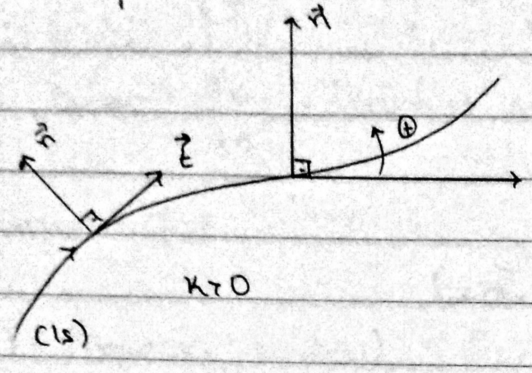
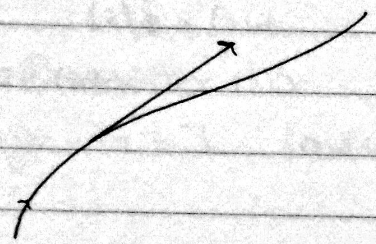
Μαθημα 5º 30/10/2017

Διαφ. Γεωμ.



$\vec{t} = \dot{c}$, $\vec{n} = J\vec{t}$



$$\vec{t} = \dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{dt}{ds} c'$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{c}{\|c'\|}$$

Μηκος τοξου: $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, du \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0$

$\Rightarrow t = t(s)$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$$

$$\vec{n} = J\vec{t} = J\left(\frac{c'}{\|c'\|}\right) \Rightarrow \vec{n} = \frac{Jc'}{\|c'\|}$$

Ασκηση

Δινεται η καμπυλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$

i) Ειναι κανονικη; Βρειτε το μηκος τοξου με αφετηρια $t_0 = 0$

ii) Να γινει αναπαραμετρηση με το μηκος τοξου

iii) Να υπολογιστει η καμπυλοτητα συναρτησει της t αλλα και της s

iv) Να βρεθει το πλαισιο Frenet συναρτησει της t και s

v) Υπαρχει εφαπτομενη (καθετη) ευθεια της c που να διερχεται απο το $(0,0)$

Λυση

i) Η c ειναι λεια με διανυσμα ταχυτητας

$c'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) = e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$

$\|c'(t)\|^2 = e^{2t}\{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t\} = 2e^t$

$\Rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t > 0$ αρα η c κανονικη

Το μηκος τοξου με αφετηρια $t_0 = 0$ ειναι η συναρτηση

$S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $s = s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du = \sqrt{2} \int_0^t e^u du \Rightarrow$

$s = s(t) = \sqrt{2}(e^t - 1)$ αντιστρεφεται

$\frac{s}{\sqrt{2}} = e^t - 1 \Rightarrow e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1$, $s > -\sqrt{2} \iff t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$, $s > -\sqrt{2}$

ii) Η αναπαραμετρηση της c ειναι

$c(s) = \left(\underbrace{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)}_{x(s)}, \underbrace{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)}_{y(s)} \right)$

$\Rightarrow \quad c(s) = \sqrt{2}$

$k(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)$

$x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$

iii) $\kappa(t) = \dfrac{x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{3/2}}$

$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$

$x''(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t - e^t \cos t = -2e^t \sin t$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$

$y''(t) = e^t \sin t + 2e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t$

$$\kappa(t) = \frac{2e^{2t}(\cos t - \sin t)\cos t + 2e^{2t}(\cos t + \sin t)\sin t}{(\sqrt{2}\, e^t)^3} \Rightarrow$$

$$\kappa(t) = \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2}\, e^{3t}} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\, e^t}$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)} = \frac{1}{s + \sqrt{2}}$$

- Αν $\lim\limits_{s \to +\infty} \kappa(s) = 0$ ευθεία

- Αν $\lim\limits_{s \to -\sqrt{2}^+} \kappa(s) = +\infty$ κύκλος με ελάχιστη ακτίνα

iv) Το πλαίσιο συναρτήσει των παραμέτρων t είναι

$$\vec{T}(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \frac{e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)}{\sqrt{2}\, e^t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$$

$$\vec{N}(t) = J\,\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t)$$

$$\vec{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right) - \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right), \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right) + \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right)$$

$\vec{n}(s) = \dots$

v) Η διανυσματική εξίσωση της εφαπτομενικής ευθείας της c στο t είναι $\vec{x} = c(t) + \lambda c'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

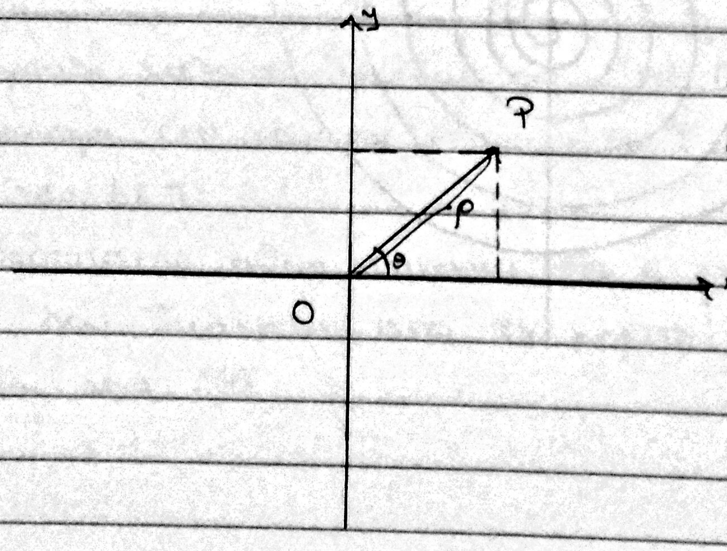
$\exists \lambda \in \mathbb{R} : c(t) + \lambda c'(t) = \vec{0}$

$c(t) = e^t(\cos t, \sin t)$

$c'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$ (έλεγχος για Γ.Ε)

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$ (δεν είναι γ.ε)

Καμία ευθεία δε περνά από το σημείο $O(0,0)$



ρ = πολική απόσταση

θ = πολική γωνία

Ισχύει $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

- Έχω $c(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$

για τα σημεία της καμπύλης έχω, $\rho(t) = e^t$, $\theta(t) = t$

- $\lim_{t\to+\infty} \|c(t)\| = +\infty$, $\lim_{t\to-\infty} \|c(t)\| = 0$

Προσοχη $c(t) \neq (0,0)$ $\forall t$

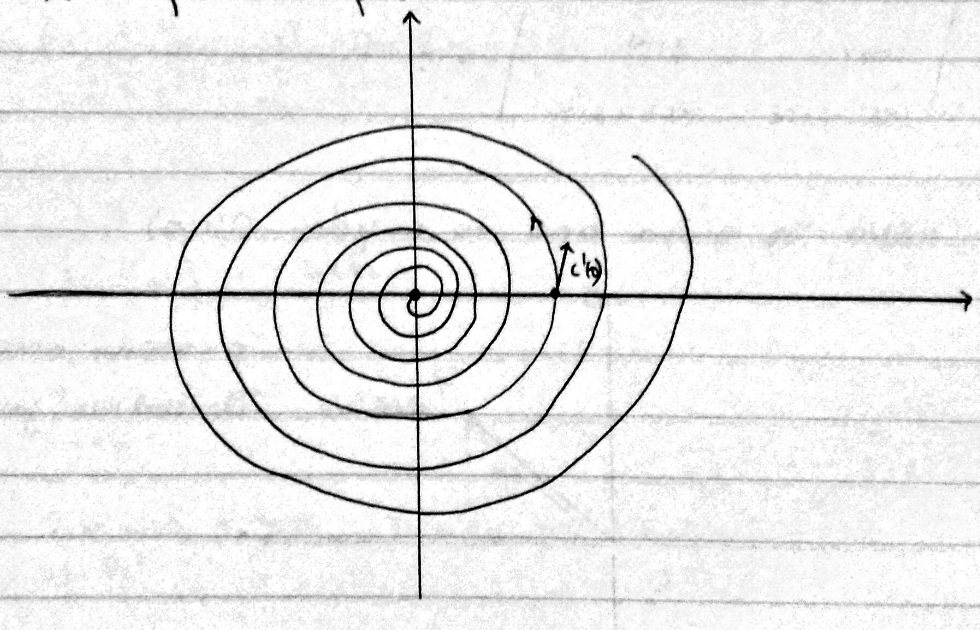
Εξεταζω αν ειναι 1-1

$c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow \|c(t_1)\| = \|c(t_2)\| \Rightarrow \rho(t_1) = \rho(t_2) \Rightarrow$

$e^{t_1} = e^{t_2} \Rightarrow t_1 = t_2$

Σημειο καμπυλης $c(0) = (1,0)$, $c'(0) = (1,1)$

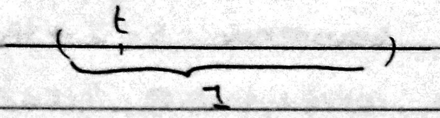
Σχεδιασμος Καμπυλης

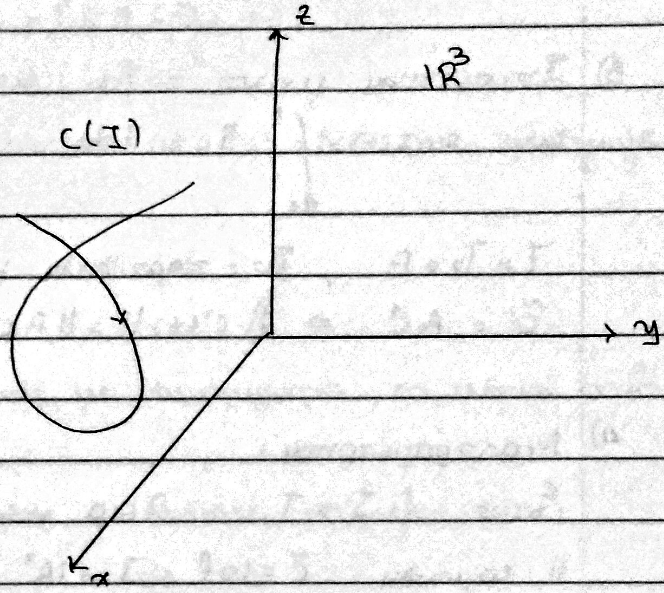


Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

Ορισμός

Καλούμε του $\mathbb{R}^3$ κάθε απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, η οποία είναι λεία (τουλάχιστον C^3)





$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

- Η καμπύλη καλείται κανονική $\iff c'(t) = 0 \quad \forall t \in I$
- Το διάνυσμα $c'(t)$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα ταχύτητας της c στο $t \in I$
- Η εφαπτομένη ευθεία κανονικής της c στο t είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $c(t)$ και είναι παράλληλη προς $c'(t)$

Ορισμός

1) Δυο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν υπάρχει ισομετρία του $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

2) Το μηκος καμπυλης απο το $a < b$, $a, b \in I$ ειναι ο αριθμος

$$L_a^b(c) = \int_a^b \| c'(t) \| \, dt$$

3) Συναρτηση μηκος τοξου ειναι η συναρτηση $s : I \to \mathbb{R}$ και $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \| c'(u) \| \, du$

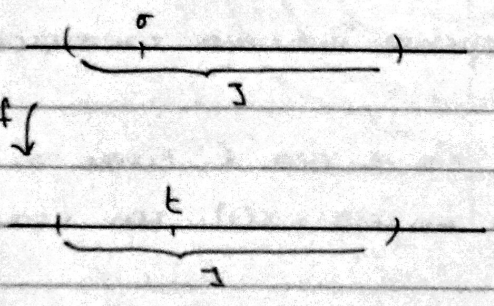
$T = T_u \circ A$, T_u = παραλληλη μεταφορα κατα u και $A \in O(3)$

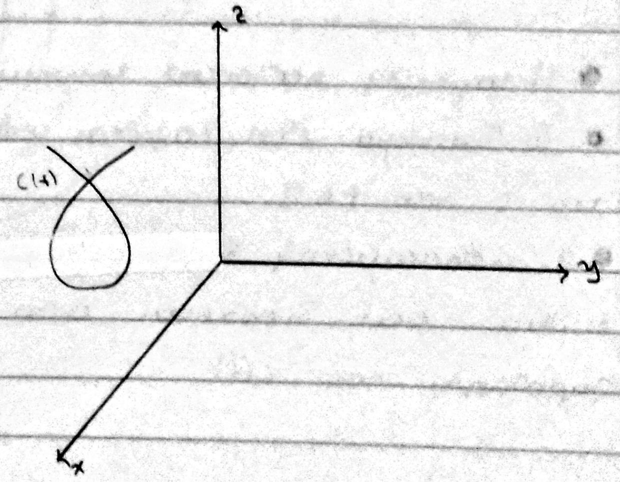
$\tilde{c}' = Ac' \Rightarrow \| \tilde{c}'(t) \| = \| A c'(t) \| = \| c'(t) \|$

4) Αναπαραμετρηση:

Εστω $f : J \to I$ λεια συναρτηση 1-1 και επι

Η καμπυλη $\bar{c} = c \circ f : J \to \mathbb{R}^3$ καλειται αναπαραμετρηση της c





$t = f(\sigma)$, $\dfrac{d\bar{c}}{d\sigma} = \dfrac{df}{d\sigma} \cdot \dfrac{dc}{dt}$

Παρατηρηση

Καθε κανονικη καμπυλη του $\mathbb{R}^3$ δεχεται αναπαραμετρηση με παραμετρο το μηκος τοξου

Αποδειξη

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow$$

η $s = s(t)$ αντιστρεφεται με αντιστροφη $t = f(s) = t(s)$ με παραγωγο

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$$

Η $\tilde{c} = c \circ f$ ειναι αναπαραμετρηση με παραμετρο το μηκος τοξου

• Η $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η καμπυλη με φυσικη παραμετρο s

$\kappa = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = \langle \ddot{c}, \vec{n} \rangle$

$\vec{t} = \dot{c}$, $\vec{n} = J\vec{t}$

$\ddot{c} = \langle \ddot{c}, \vec{t} \rangle \vec{t} + \underbrace{\langle \ddot{c}, \vec{n} \rangle}_{\kappa} \vec{n}$

$\langle \ddot{c}, \vec{t} \rangle = \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 0$, $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{\cdot} = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$, $\ddot{c} = \kappa \vec{n}$

Καμπυλοτητα καμπυλων του $\mathbb{R}^3$ με φυσικη παραμετρο

Ορισμος

Εστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπυλη με παραμετρο το μηκος τοξου $s \in I$. Ονομαζουμε καμπυλοτητα της c τη συναρτηση $\kappa : I \to [0, +\infty)$ με $\kappa(s) = \|\ddot{c}(s)\|$

$\kappa(s) = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \|\ddot{c}(s)\| = 0 \ \forall s \Leftrightarrow \ddot{c}(s) = 0 \ \forall s$

$\Leftrightarrow \dot{c}(s) = 0 =$ σταθ. $\Rightarrow c(s) = p_0 + su$, $\|u\| = 1$

η ιδια αναπαραμετρηση τη c με παραμετρο $\tilde{s}=-s$ τοτε το διανυσμα ταχυτητας ειναι

$$\frac{dc}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \frac{dc}{ds} = -\dot{c} \Rightarrow \left\| \frac{dc}{d\tilde{s}} \right\| = 1 \Rightarrow \tilde{s} = \text{μηκος τοξου}$$

$$\tilde{k} = \left\| \frac{d^2c}{d\tilde{s}^2} \right\| = \left\| \frac{d}{d\tilde{s}}(-\dot{c}) \right\| = \left\| \frac{d\dot{c}}{d\tilde{s}} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \frac{d\dot{c}}{ds} \right\| = \| -\ddot{c} \| = \| \ddot{c} \|$$

Εστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπυλη με φυσικη παραμετρο. Θεωρω τη καμπυλη $\tilde{c}$ γεωμ. ισος της c δηλ.

$$\tilde{c} = T \circ c, \quad T \in Isom(\mathbb{R}^3)$$

$T = T_v \circ A$, $A \in O(3)$

$$\frac{d\tilde{c}}{ds} = A\dot{c} \Rightarrow \left\| \frac{d\tilde{c}}{ds} \right\| = \| A\dot{c} \| = \| \dot{c} \|$$

$\tilde{k}(s) = \| \ddot{\tilde{c}}(s) \|$, $\dot{\tilde{c}} = A\dot{c} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c} = \| A\ddot{c}(s) \| = \| \ddot{c}(s) \| = k(s)$